Sturmin sanat ja ketjumurtoluvut

Jarkko Peltomäki

Turku Centre for Computer Science
University of Turku

7.1.2016

Sisältö

- Ketjumurtoluvut
- Sturmin sanojen määritelmä(t)
- Ketjumurtolukujen sovellus Sturmin sanoihin

Ketjumurtoluvut

- Jokaisella irrationaaliluvulla α on yksikäsitteinen päättymätön ketjumurtolukukehitelmä:

$$\alpha = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}}$$

Konvergentit

- $p_0/q_0 = [a_0]$, $p_1/q_1 = [a_0; a_1]$, ..., $p_k/q_k = [a_0; a_1, \dots, a_k]$

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0, \quad p_1 = a_1 a_0 + 1, \quad p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \quad k \geq 2, \\ q_0 &= 1, \quad q_1 = a_1, \qquad\qquad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}, \quad k \geq 2. \end{aligned}$$

- Luvun α konvergentit p_k/q_k ovat sen parhaita approksimaatioita:

$$\min_{0<n<q_k} \|n\alpha\| = \|q_{k-1}\alpha\| = |q_{k-1}\alpha - p_{k-1}|, \quad k \geq 1,$$

missä normi $\|x\| = \min\{\{x\}, 1 - \{x\}\}$ mittaa luvun x etäisyyttä lähimmästä kokonaisluvusta.

Semikonvergentit

- Luvun $\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ semikonvergentit ovat muotoa

$$\frac{p_{k,\ell}}{q_{k,\ell}} = \frac{\ell p_{k-1} + p_{k-2}}{\ell q_{k-1} + q_{k-2}},$$

  missä $0 < \ell < a_k$.
- Semikonvergentteja olemassa vain jos $a_k > 1$.
- Luvun α semikonvergentit ovat sen ”toiseksi parhaita approksimaatioita”.

(Semi)kontinuantit

- kontinuantti: konvergentin nimittäjä
- semikontinuantti: semikonvergentin nimittäjä

- Ympyrällä $[0,1] \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ pisteiden $\{\alpha\}$, $\{2\alpha\}$, …, $\{n\alpha\}$ joukossa lähimpänä pistettä 0 (jommalta kummalta puolelta) ovat pisteet $\{q_{k-1}\alpha\}$ ja $\{q_{k,\ell}\alpha\}$, missä k on suurin kokonaisluku, jolle $q_{k-1}, q_{k,\ell} \leq n$ ja $0 \leq \ell < a_k$.

Sturmin sanat

- Ääretön sana on Sturmin sana jos sillä on $n+1$ pituutta n olevaa tekijää.
- Tyyppiesimerkki: Fibonaccin sana f:

$$
\begin{aligned}
f_1 &= 0 \\
f_2 &= 01 \\
f_3 &= 010 \\
f_k &= f_{k-1}f_{k-2}
\end{aligned}
$$

$$f = \lim_{k\to\infty} f_k = 0100101001001010010 1\ldots$$

Rotaatiosanat

- Sturmin sanat vastaavat täsmälleen irrationaalisia rotaatiosanoja.
- Rotaatiosanat:
  - Valitaan irrationaaliluku $\alpha \in (0, 1)$.
  - Jaetaan ympyrä $[0, 1]$ kahteen osaan: $I_0 = [0, 1 - \alpha)$, $I_1 = [1 - \alpha, 1)$.
  - Pisteen $x \in [0, 1)$ rata rotaatiossa $R \colon x \mapsto \{x + \alpha\}$ koodataan äärettömäksi sanaksi $s_{x,\alpha}$ sen mukaan kumpaan väliin I_0 tai I_1 radan piste kuuluu.
- Tyypillisesti valitaan $\alpha < 1/2$, jolloin 00 esiintyy, mutta 11 ei.
- Luku α on Sturmin sanan kirjaimen 1 esiintymistiheys.
- Fibonaccin sanassa kirjaimen 1 tiheys on $2 - \varphi = [0; 2, \overline{1}] \approx 0,38$.

Rotaatiosanat

- Pisteiden 0, $\{-\alpha\}$, $\{-2\alpha\}$, ..., $\{-n\alpha\}$ muodostamat välit vastaavat bijektiivisesti rotaatiokulman α Sturmin sanojen pituutta n olevia tekijöitä.
- Jokaista rotaatiokulman α Sturmin sanan tekijää $w = a_0 a_1 \cdots a_{n-1}$ vastaa yksikäsitteinen osaväli

$$[w] = I_{a_0} \cap R^{-1}(I_{a_1}) \cap \ldots \cap R^{-(n-1)}(I_{a_{n-1}}).$$

- Siis Sturmin sana $s_{x,\alpha}$ alkaa tekijällä w jos ja vain jos $x \in [w]$.
- Tason n välit: pituutta n olevia tekijöitä vastaavat välit.

Rotaatiosanat

- Tekijät riippuvat siis vain luvusta α: kaikilla rotaatiokulman α Sturmin sanoilla on sama kieli $\mathcal{L}(\alpha)$.
- Pituutta n olevien tekijöiden tutkimiseksi riittää siis tarkastella vain vastaavia välejä ympyrällä.

Toistot

- Sana on toisto, jos se on muotoa w^n jollain $n \geq 2$.
  - Toisto on primitiivinen mikäli w ei itsessään ole toisto.
- Äärettömissä sanoissa esiintyviä toistoja on tutkittu paljon. On esimerkiksi olemassa äärettömiä sanoja, joissa ei esiinny lainkaan toistoja.
- Entäpä Sturmin sanojen toistot?
  - Ketjumurtolukujen sovellus.

- Olkoon $s_{x,\alpha} = w^2 \cdots$, missä w^2 on primitiivinen toisto.
- Merkitään $n = |w|$.
- Pisteiden x ja $R^n(x)$ on siis oltava samalla välillä $[w]$.
- Pisteiden x ja $R^n(x)$ etäisyys on $\|n\alpha\|$.
- Siispä luvun $\|n\alpha\|$ tulee olla pienempi kuin välin $[w]$ pituus $\|[w]\|$.

Three Distance Theorem (TDT)

- Olkoon $n > q_1$, jolloin voidaan kirjoittaa
$$n = \ell q_{k-1} + q_{k-2} + r,$$
missä $k \geq 2$, $0 < \ell < a_k$ ja $0 \leq r < q_{k-1}$.
- Tällöin tason n välien pituudet ovat:
  - $\|q_{k-1}\alpha\|$ ($n + 1 - q_{k-1}$ kpl),
  - $\|q_{k,\ell}\alpha\|$ ($r + 1$ kpl),
  - $\|q_{k,\ell-1}\alpha\|$ ($q_{k-1} - (r + 1)$ kpl).

Toistot Sturmin sanoissa

- Tason $n = |w|$ välien pituudet ovat siis $\|q_{k-1}\alpha\|$, $\|q_{k,\ell}\alpha\|$ ja $\|q_{k,\ell-1}\alpha\|$, missä q_{k-1}, $q_{k,\ell}$ ja $q_{k,\ell-1}$ ovat suurimmat lukua n pienemmät (semi)kontinuantit.
- Koska luku $\|n\alpha\|$ on jotakin tason n välin pituutta pienempi, niin $n = q_{k-1}$ tai $n = q_{k,\ell}$, sillä (semi)kontinuantit q_{k-1} ja $q_{k,\ell}$ antavat parhaan ja toiseksi parhaan approksimaation luvulle α.

Lemma

Jos w^n on primitiivinen toisto, niin $|w|$ on (semi)kontinuantti.

Indeksi

- Tekijän w indeksi $\mathrm{ind}(w)$ on suurin kokonaisluku, jolla $w^n \in \mathcal{L}(\alpha)$.
- Siis

$$\mathrm{ind}(w) = \left\lfloor \frac{|[w]|}{\||w|\alpha\|} \right\rfloor + \begin{cases} 1, \text{jos } |[w]| \neq \||w|\alpha\|, \\ 0, \text{muulloin.} \end{cases}$$

Indeksi

- Oletetaan, että $|w| > q_1$ ja $\operatorname{ind}(w) \geq 2$, jolloin $|w| = q_{k,\ell}$, $k \geq 2$, $0 < \ell \leq a_k$.
- TDT:n mukaan pituudelle $|[w]|$ on kolme vaihtoehtoa:
  - Jos $|[w]| = \|q_{k,\ell-1}\alpha\|$, niin

$$\begin{aligned}
\operatorname{ind}(w) &= \left\lfloor \frac{\|q_{k,\ell-1}\alpha\|}{\|q_{k,\ell}\alpha\|} \right\rfloor + 1 \\
&= \left\lfloor \frac{\|q_{k,\ell}\alpha\| + \|q_{k-1}\alpha\|}{\|q_{k,\ell}\alpha\|} \right\rfloor + 1 \\
&= \left\lfloor \frac{\|q_{k-1}\alpha\|}{\|q_{k,\ell}\alpha\|} \right\rfloor + 2 \\
&= \begin{cases} a_{k+1} + 2, \text{jos } \ell = a_k, \\ 2, \text{jos } \ell < a_k. \end{cases}
\end{aligned}$$

Indeksi

- Toimimalla muissa tapauksissa vastaavasti saadaan:
  - $|w| = q_k$ (kontinuantti) $\implies \operatorname{ind}(w) \in \{a_{k+1} + 2, a_{k+1} + 1, 1\}$
  - $|w| = q_{k,\ell}$ (semikontinuantti) $\implies \operatorname{ind}(w) \in \{2, 1\}$
- Erityistapauksessa $|w| = q_0 = 1$ saadaan $\operatorname{ind}(w) \in \{a_1, 1\}$.
- Erityistapauksessa $|w| = q_1 = a_1$ saadaan $\operatorname{ind}(w) \in \{a_2 + 1, 1\}$.

Indeksi

- Rotaatiokulman α Sturmin sanan indeksi on siis

$$\max\{a_1, a_2 + 1, 2 + \sup_{k \geq 3}\{a_k\}\}.$$

- Erityisesti Fibonaccin sanassa esiintyy korkeintaan 3. potensseja.
- Indeksi on äärellinen jos ja vain jos ketjutermien a_k jono on rajoitettu.

Rationaali-indeksi

- Rotaatiokulman α Sturmin sanan rationaali-indeksi on
$$\max\left\{a_1, 2 + \sup_{k\geq 2}\{a_k + (q_{k-2} - 2)/q_{k-1}\}\right\}.$$
- Erityisesti Fibonaccin sanan rationaali-indeksi on $2 + \varphi \approx 3,61$.